定理 2.4:

(1) ⇒ (2). 已知 f 在 X 中下半连续. 要证 $epi(f)$ 是闭集

取点列 $\{(x_n, y_n)\} \subseteq epi(f)$ s.t. $(x_n, y_n) \to (x^*, y^*)$, $n \to \infty$.

由 $epi(f)$ 定义知: $\forall n \geq 1$, $f(x_n) \leq y_n$, $y_n \in \mathbb{R}$.

由 f 在 x^* 处下半连续性得

$$f(x^*) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n) \leq \liminf_{n\to\infty} y_n = y^*$$

$\therefore (x^*, y^*) \in epi f \quad \Rightarrow \quad epi(f)$ 是闭集.

(1) ⇒ (3). 已知 $epi(f)$ 是闭集, 下证 $\{x \in X: f(x) \leq a\}$ 为闭.

取 $\{x_n\} \subseteq \{x \in X: f(x) \leq a\}$ s.t. $x_n \to x^*$.

显然有 $(x_n, a) \in epi f$, $\forall n$ 以及 $(x_n, a) \to (x^*, a)$, $n \to \infty$

由 $epi(f)$ 的闭性知, $(x^*, a) \in epi(f) \Rightarrow f(x^*) \leq a$.

$\Rightarrow \quad x^* \in \{x \in X: f(x) \leq a\}$ — 闭集.

(3) ⇒ (1) 已知下水平集 $\{x \in X: f(x) \leq a\}$ 是闭集, 要证 f 在 X 中下半连续.

反证: f 在 X 中不是下半连续的.

$\exists \{x_n\}: x_n \in X, x_n \to \bar{x}$, 有 $\liminf_{n\to\infty} f(x_n) < f(\bar{x})$

由实数稠密性知, $\exists a$ s.t. $\underline{\liminf_{n\to\infty} f(x_n) < a < f(\bar{x})}$ ①

由数列下极限定义, $\exists$ 子列 $\{x_{n_k}\}$: $x_{n_k} \to \bar{x}$, $k \to \infty$, $x_{n_k} \in X$

s.t. $f(x_{n_k}) \leq a$, $\forall k \geq 1$

由下水平集 $\{x \in X: f(x) \leq a\}$ 的闭性 以及 $x_{n_k} \to \bar{x}$, $x_{n_k} \in X$

$\Rightarrow f(\bar{x}) \leq a$. 与 ① 矛盾.

故 f 在 X 中下半连续.

(3) ⇔ (4) 开集, 闭集互补条件可证.