定理2.1.

Pf: (1) $\Rightarrow$ (2)

由(1)知，$\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，当 $x\in X$，$\|x-x_0\|<\delta$ 有 $f(x)>f(x_0)-\varepsilon$

从而得 $\liminf\limits_{x\to x_0} f(x) \geq f(x_0)-\varepsilon$

由 ε 的任意性，$\liminf\limits_{x\to x_0} f(x) \geq f(x_0)$

(2) $\Rightarrow$ (3) $\because$ $\liminf\limits_{x\to x_0} f(x) = \min\left\{ \liminf\limits_{n\to\infty} f(x_n) \,\middle|\, x_n\in X, x_n\neq x_0 \text{ 且 } x_n\to x_0 \right\}$

由 $f(x_0) \leq \liminf\limits_{x\to x_0} f(x)$ 得

$\forall \{x_n\}$: $x_n\in X$，$x_n\to x_0$ 有

$$f(x_0) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n).$$

(3) $\Rightarrow$ (1). 已知 $\forall \{x_n\}$: $x_n\in X$，$x_n\to x_0$ 有 $f(x_0)\leq \liminf\limits_{n\to\infty} f(x_n)$.

反证：设 f 在 x_0 处不下半连续.

$\exists \varepsilon_0>0$，$\forall \delta_n=\frac{1}{n}>0$，$\exists x_n\in X$，$\|x_n-x_0\|<\frac{1}{n}$ 有 $f(x_n)\leq f(x_0)-\varepsilon_0$

取下极限 $\liminf\limits_{n\to\infty} f(x_n) \leq f(x_0)-\varepsilon_0$ 矛盾.

故 f 在 x_0 处下半连续.