

定理 4.5.

Pf: \Rightarrow) 已知 E 是闭集, 即 $E' \subset E$.

设 $\{x_n\}$ 为 E 中的收敛点列, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$,

若 $\{x_n\}$ 中只有有限多个不同的点, 则当 n 充分大时, 有 $x = x_n \in E$

若 $\{x_n\}$ 中有无穷多个不同的点, 可取互异点列 $\{x_{k_i}\}$, 使得

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x_{k_i} = x, \quad \text{则 } x \in E' \subset E.$$

\Leftarrow) 已知 E 中点列 $\{x_n\}$ 若收敛到 x 时, 则 $x \in E$. 要证 $E' \subset E$.

$\forall x \in E'$, 由定理 4.2 得

从 E 中可以选出点列 $\{x_k\} \subset E$, $x_k \neq x$, st. $x_k \rightarrow x$ ($k \rightarrow \infty$)

由条件知 $x \in E$.

$E' \subset E$ E 为闭集