(定理 42)

Pf: (i) $\Rightarrow$ (ii) 已知 $x\in E'$，则 $\forall r>0$, $B(x;r)\cap(E\setminus\{x\})\neq\emptyset$.

取 $r=\frac{1}{k}$ $(k=1,2,\cdots)$，在 $B(x;\frac{1}{k})$ 中取一点 $x_k\neq x$，得 $\{x_k\}\subset E$，

满足 $\|x_k-x\|<\frac{1}{k}$，

从而当 $k\to\infty$ 时，有 $x_k\to x$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) 已知存在 E 中点列 $\{x_k\}$: $x_k\neq x$ 使得 $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x$.

$\forall r>0$, $\exists K\in\mathbb{N}$, 当 $k\geq K$ 时有 $\|x_k-x\|<r$，即 $x_k\in B(x;r)$

(换言之，$\forall r>0$，点列 $\{x_k\}$ 中有无穷多个点落在 $B(x;r)$ 中.)

令 $r_1=1$，取 $\{x_k\}$ 中一点，不妨仍记为 $x_1\in B(x;r_1)$

令 $r_2=\min\{\|x-x_1\|,1/2\}$，取 $x_2\in B(x;r_2)$

$\vdots$

从此类推，可得 E 中互异点列 $\{x_k\}$ [这时得到的 $\{x_k\}$ 其实是子列]

s.t. $\|x_k-x\|<r_k$

$k\to\infty$, $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) 若存在 E 中互异点列 $\{x_k\}\subset E$, s.t. $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x$

从而 $\forall r>0$, $\exists k_0$, 当 $k\geq k_0$ 有 $\|x_k-x\|<r$.

即 $x_k\in B(x;r)$ $(k\geq k_0)$

$B(x;r)$ 中含有 E 中无穷多个点 $\therefore x\in E'$