性质4.3.

Pf: (1) (2) 由定理4.2及命题直接可得

(3). 先证 $(A\cup B)'=A'\cup B'$

① $A\subset A\cup B$, $B\subset A\cup B \Rightarrow A'\subset(A\cup B)'$, $B'\subset(A\cup B)'$

$\therefore\ A'\cup B'\subset(A\cup B)'$

② $\forall x\in(A\cup B)'$, 则存在 $A\cup B$ 中的互异点列 $\{x_k\}\subset A\cup B$, s.t. $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x$.

从而存在 $\{x_k\}$ 的一个子列 $\{x_{k_i}\}$ 包含于A或B

不妨设其包含于A, 且 $\lim\limits_{i\to\infty}x_{k_i}=x \Rightarrow x\in A'$

反之, $x\in B'$

$\therefore\ (A\cup B)'\subset A'\cup B'$

再证 $(A\cap B)'\subset A'\cap B'$

$\because\ A\cap B\subset A \Rightarrow (A\cap B)'\subset A'$

$A\cap B\subset B \Rightarrow (A\cap B)'\subset B'$

$\Rightarrow (A\cap B)'\subset A'\cap B'$.

(4) 要证 $(A')'\subset A\cup A'$, 即证 $(A\cup A')^c\subset((A')')^c$.

$\forall x\in(A\cup A')^c$ 则 $x\notin A\cup A'$ 即 $x\notin A$, $x\notin A'$.

$\exists\, r>0$, s.t. $B(x;r)\cap A=\phi$ (1)

$\because\ B(x;r)$ 为开集

$\forall y\in B(x;r)$, $\exists\,\delta>0$, s.t. $B(y;\delta)\subset B(x;r)$

由(1)得 $B(y;\delta)\cap A=\phi$ $\therefore\ y\notin A'$

由y的任意性, $B(x;r)$ 中没有A中任何一个聚点.

即 $B(x;r)\cap A'=\phi$

$\therefore\ x\notin(A')' \Rightarrow x\in((A')')^c$