prove: $\limsup\limits_{x\to x_0} f(x) = \max\left\{ \limsup\limits_{n\to\infty} f(x_n) \,\middle|\, x_n\in D,\ x_n\neq x_0 且 x_n\to x_0 \right\}$

Pf: 记 $E=\{\lambda\in\mathbb{R}_\infty : \underline{\lambda 为 f(x) 在 x_0 处子极限}\}$

$\exists x_n\in D,\ x_n\neq x_0$，且 $x_n\to x_0$, s.t. $f(x_n)\to\lambda$.

记 $F=\left\{ \limsup\limits_{n\to\infty} f(x_n) \,\middle|\, x_n\in D,\ x_n\neq x_0 且 x_n\to x_0 \right\}$

$\forall \lambda\in E$: $\exists \{x_n\}\subset D,\ x_n\neq x_0$ 且 $x_n\to x_0$ s.t. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\lambda$

$\because \lambda = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \limsup\limits_{n\to\infty} f(x_n) \in F$

$\therefore E\subset F$ ①

$\forall \lambda'\in F$, $\lambda' = \limsup\limits_{n\to\infty} f(x_n)$，其中 $x_n\in D,\ x_n\neq x_0,\ x_n\to x_0$

由数列上极限定义知，λ' 为 $\{f(x_n)\}$ 的最大极限点

存在子列 $\{f(x_{n_k})\}$ 满足 $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k})=\lambda'$

其中 $x_{n_k}\in D,\ x_{n_k}\neq x_0$，且 $x_{n_k}\to x_0$

$\therefore \lambda'$ 为 $f(x)$ 在 x_0 的子极限，$\lambda'\in E \Rightarrow F\subset E$ ②

由 ①② 得 $E=F$

由函数上极限定义得

$$\limsup_{x\to x_0} f(x) = \sup E \triangleq \max E$$
$$= \max F$$
$$= \max\left\{ \limsup_{n\to\infty} f(x_n) \,\middle|\, x_n\in D,\ x_n\neq x_0 且 x_n\to x_0 \right\}$$

同理可证：

$$\liminf_{x\to x_0} f(x) = \min\left\{ \liminf_{n\to\infty} f(x_n) \,\middle|\, x_n\in D,\ x_n\neq x_0 且 x_n\to x_0 \right\}$$