定理2.2.

Pf: (1) ① 若 $a^*=+\infty$, $\sup E=+\infty$, 即 E 无上界,

从而 $\{a_n\}$ 无上界, 故 $\exists$ 子列 $\{a_{n_k}\}$, s.t. $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}=+\infty$, $\Rightarrow +\infty\in E$

② 若 $a^*=-\infty$, 则 $E=\{-\infty\}$, 这时 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=-\infty$

③ 若 a^* 有限, 由 $a^*=\sup E$ 可知: $\exists\ x_k\in E$ $(k=1,2,\cdots)$ s.t. $\lim\limits_{k\to\infty} x_k=a^*$.

$\boxed{\lambda \text{ 为 } \{a_n\} \text{ 的一个极限点} \iff \forall \varepsilon>0,\ \{a_n\} \text{ 中有无穷多项落在 } (\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon) \text{ 中}}$

由于 $x_1\in E$, x_1 为 $\{a_n\}$ 的一个极限点. 取 $\varepsilon=1$, $\{a_n\}$ 中有无穷多项落在 (x_1-1, x_1+1) 中

不妨取 $a_{n_1}\in(x_1-1, x_1+1)$.

$x_2\in E$, 取 $\varepsilon=1/2$, $\{a_n\}$ 中有无穷多项落在 $(x_2-\frac{1}{2}, x_2+\frac{1}{2})$ 中, 此时 n_1 已取定,

不妨取 $n_2>n_1$, $a_{n_2}\in(x_2-\frac{1}{2}, x_2+\frac{1}{2})$

$\vdots$

以此类推: $x_k\in E$, 取 $\varepsilon=1/k$, $\{a_n\}$ 中有无穷多项落在 $(x_k-\frac{1}{k}, x_k+\frac{1}{k})$ 中,

取 $n_k>n_{k-1}$, $a_{n_k}\in(x_k-\frac{1}{k}, x_k+\frac{1}{k})$

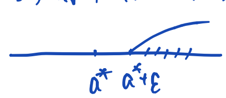
可得 $\{a_n\}$ 的一个子列 $\{a_{n_k}\}$ 满足 $|a_{n_k}-x_k|<\frac{1}{k}$

$\therefore \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}=\lim\limits_{k\to\infty} x_k=a^* \Rightarrow a^*\in E$

(2) (i) a^* 有限, 由(1)知, $a^*\in E$, 即 a^* 为 $\{a_n\}$ 的一个极限点, 存在子列 $\{a_{n_k}\}$, s.t. $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}=a^*$

$\therefore \forall\varepsilon>0$, $\{a_n\}$ 中有无穷多项落在 $(a^*-\varepsilon, a^*+\varepsilon)$ 中

反证: 若 $\{a_n\}$ 中有无穷多项落在 $(a^*+\varepsilon, +\infty)$ 上, 这时 $\exists$ 一个极限点 $y\in E$, 满足



$y\geq a^*+\varepsilon>a^*$ 矛盾.

$\therefore$ $\{a_n\}$ 中只有有限多项落在 $(a^*+\varepsilon, +\infty)$ 上

(ii) $a^*=+\infty$, 存在子列 $\{a_{n_k}\}$ 满足 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}=+\infty$, 即 $\forall N>0$, 在 $\{a_n\}$ 中有无穷多项大于 N.

(iii) $a^*=-\infty$, 则 $\sup E=\{-\infty\}$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a^*$.