性质 3.2.

Pf: (1) 由上、下极限的第二种定义方式得

$$\limsup_{n\to\infty}(-a_n)=\inf_{n\geq 1}\sup_{k\geq n}(-a_k)=\inf_{n\geq 1}\left(-\inf_{k\geq n}a_k\right)=-\sup_{n\geq 1}\inf_{k\geq n}a_k=-\liminf_{n\to\infty}(a_n)$$

$(\because \sup(-E)=-\inf E)$

同理有: $\liminf_{n\to\infty}(-a_n)=-\limsup_{n\to\infty}a_n$.

(2) 要证 $\liminf_{n\to\infty}a_n+\liminf_{n\to\infty}b_n\leq\liminf_{n\to\infty}(a_n+b_n)\leq\liminf_{n\to\infty}a_n+\limsup_{n\to\infty}b_n$.

由上、下极限的第二种定义方式得,

即证 $\inf_{k\geq n}a_k+\inf_{k\geq n}b_k\overset{(i)}{\leq}\inf_{k\geq n}(a_k+b_k)\overset{(ii)}{\leq}\inf_{k\geq n}a_k+\sup_{k\geq n}b_k$

(i) 固定 $k\geq n$, $\begin{array}{l}\inf_{k\geq n}a_k\leq a_k\\ \inf_{k\geq n}b_k\leq b_k\end{array}\Rightarrow \inf_{k\geq n}a_k+\inf_{k\geq n}b_k\leq a_k+b_k,\ \forall k\geq n$

$\Rightarrow \inf_{k\geq n}a_k+\inf_{k\geq n}b_k\leq\inf_{k\geq n}(a_k+b_k)$

(ii) 令 $x=\inf_{k\geq n}a_k$

$\exists\ a_{k_0}<x+\varepsilon,\quad k_0\geq n$

$\therefore \inf_{k\geq n}(a_k+b_k)\leq a_{k_0}+b_{k_0}<x+\varepsilon+\sup_{k\geq n}b_k=\inf_{k\geq n}a_k+\sup_{k\geq n}b_k+\varepsilon$

令 $\varepsilon\to 0$, 得 $\inf_{k\geq n}(a_k+b_k)\leq\inf_{k\geq n}a_k+\sup_{k\geq n}b_k$

同理可证:

$$\liminf_{n\to\infty}a_n+\limsup_{n\to\infty}b_n\leq\limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n)\leq\limsup_{n\to\infty}a_n+\limsup_{n\to\infty}b_n.$$